CHAPITRE
10

Chute libre dans un champ de pesanteur uniforme

→ Manuel pages 225 à 242

Choix pédagogiques

Le choix a été fait de regrouper non pas l'étude des chutes verticales (avec ou sans frottement) mais les chutes libres (avec ou sans vitesse initiale).

Ainsi, dans ce chapitre, après les définitions de la chute libre et du champ de pesanteur uniforme, la modélisation commune à toute chute libre conduit aux équations différentielles. Leur résolution fait alors intervenir les conditions initiales et différencie les mouvements avec ou sans vitesse initiale.

Les activités proposées permettent d'introduire les conditions de « chute libre ». Une étude expérimentale est réalisée pour une chute verticale. Une autre étude est faite à partir d'une photographie stroboscopique d'une chute avec vitesse initiale.

Des deux travaux pratiques qui suivent, le premier, classique, étudie un enregistrement vidéo d'une chute parabolique d'une balle, le deuxième utilise la simulation (avec le logiciel Interactive physics) pour aborder une situation plus difficile où le lanceur est lui-même en mouvement.

Découvrir et réfléchir

Activité documentaire 1

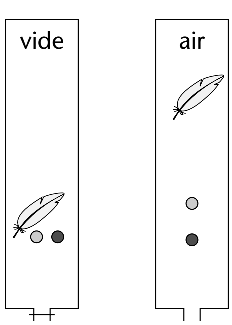
Réponses aux questions

1. a. Dans cette phrase, il faut comprendre que tous les corps tomberaient à la même vitesse ; leur vitesse n'est pas constante, elle augmente avec la hauteur de chute.

b. Les forces dues au fluide sont la force de frottement et la poussée d'Archimède.
L'hypothèse formulée est que, dans le vide, des corps de masses différentes ont même mouvement de chute.

2. a. Newton réalise l'expérience dans un tube vidé de son air et avec des objets de masses et de formes différentes.

b.



3. L'absence d'atmosphère sur la Lune a permis à David Scott de réaliser la chute des deux objets dans le vide comme dans le tube de Newton.

Activité expérimentale 2

Commentaire. Il s'agit d'introduire les conditions d'étude d'une chute « libre » : chute d'un objet de forme aérodynamique d'une hauteur d'environ 1 m dans l'air (et non plus dans un liquide comme dans le chapitre 9).

Réponses aux questions

1. L'observation de l'enregistrement vidéo montre que les deux billes ont même mouvement de chute : même altitude à chaque date. Leurs masses étant différentes, on conclut que la masse n'influe pas sur le mouvement.

2. Les représentations graphiques $v(t)$ donnent des droites identiques pour les deux billes.

3. Par définition, le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, soit suivant l'axe vertical orienté vers le bas : $a_z(t) = \dfrac{dv_z}{dt}$, seule coordonnée du vecteur accélération.
Le coefficient directeur de $v(t)$ est donc égal à a_z.

Activité documentaire 3

Commentaires. Cette étude d'une chute avec vitesse initiale à partir d'une chronophotographie donne l'occasion d'expliquer son obtention en éclairage stroboscopique. Deux méthodes d'exploitation sont envisageables.
• La détermination des coordonnées du centre d'inertie de la balle à partir du relevé sur papier-calque doit être réalisée avec soin. Le calcul des vitesses peut être ensuite réalisé à l'aide d'un tableur, ce qui permet de bien assimiler la méthode de calcul.
• L'étude à l'aide d'un logiciel de pointage puis de traitement de données est plus rapide mais suppose une bonne compréhension de la méthode de calcul de la vitesse.

Réponses aux questions

1. Suivant l'axe horizontal :

a. les coordonnées $x_G(t)$ sont rassemblées dans le tableau ci-dessous ;

b. on constate que la coordonnée $v_x(t)$ de la vitesse est pratiquement constante (voir graphique ci-dessous) :

$$v_x(t) = 2{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

(Sur le papier-calque, les projections du centre d'inertie de la balle sur l'axe horizontal sont à intervalles réguliers.)

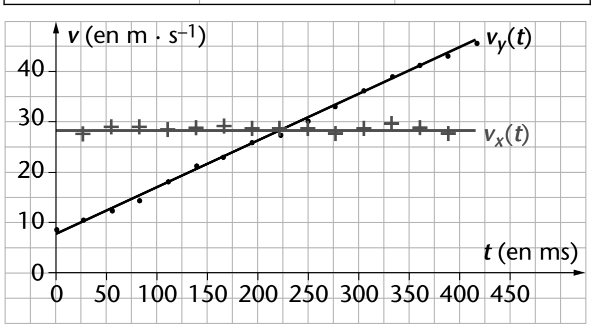
2. Suivant l'axe vertical orienté vers le bas :

a. les coordonnées $y_G(t)$ sont rassemblées dans le tableau ci-dessous ;

b. la représentation graphique $v_y(t)$ peut être modélisée par une droite (voir graphique ci-dessous) :

$$v_y(t) = 9{,}5\ t + 0{,}76\ (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

t (ms)	*x* (m)	*y* (m)
0,0	0,00	0,00
27,5	0,08	0,02
55,0	0,16	0,06
82,5	0,24	0,09
110,0	0,32	0,14
137,0	0,40	0,19
165,0	0,48	0,25
192,0	0,56	0,32
220,0	0,64	0,39
247,0	0,72	0,47
275,0	0,79	0,56
303,0	0,87	0,66
330,0	0,95	0,76
357,0	1,03	0,87
385,0	1,11	0,99
412,0	1,19	1,12



3. a. Par définition, $a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt}$ et $a_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt}$.

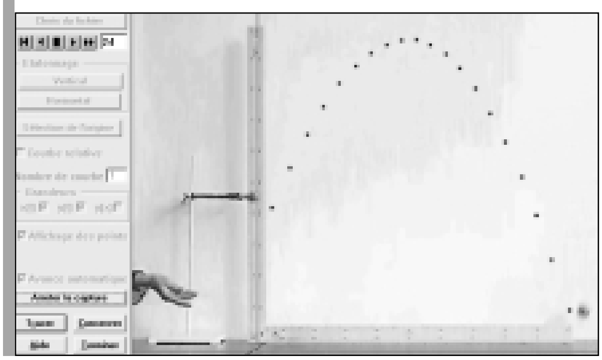
Soit $a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = 9{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

b. Le vecteur accélération est vertical, orienté vers le bas et de valeur $9{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Appliquer et réfléchir

TP 1

Commentaire. L'exploitation qui suit a été réalisée à partir d'une vidéo disponible sur le site compagnon du manuel www.nathan.fr/siriuslycee.
Données : masse de la balle : $m = 45{,}28$ g ; diamètre de la balle $d = 4{,}26$ cm ; durée entre deux images : $\Delta t = 1/25$ s ; échelles : 1,02 m pour la longueur totale d'une règle.
Le pointage est effectué à partir de la première image qui montre la balle libérée de l'action de la main du lanceur. L'axe $(x'x)$ est horizontal et orienté vers la droite et l'axe $(y'y)$ est vertical et orienté vers le haut.



Réponses aux questions

1. a. b et c. Voir graphiques ci-dessous.

• Les valeurs $v_x(t)$ sont pratiquement égales ; le mouvement est uniforme selon l'axe horizontal.

• Les points représentatifs de $v_y(t)$ sont alignés : le mouvement est uniformément varié selon cet axe.

d. $v_x(t)$ peut être modélisée par une droite d'équation :

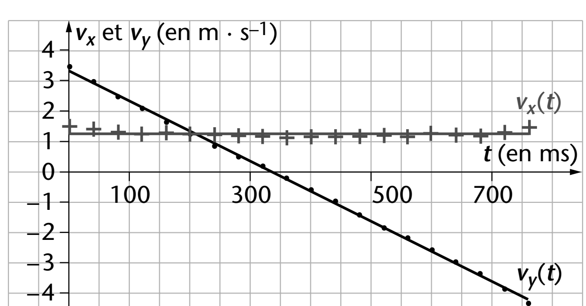
$$v_x(t) = v_{0x} = 1{,}24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

vy(t) peut être modélisée par une droite :

$$v_y(t) = a_y t + v_{0y} = -\,9{,}83t + 3{,}3 \quad \text{donc} \quad v_{0y} = 3{,}3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

e. $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}24^2 + 3{,}3^2} = 3{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$\tan \alpha = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$ d'où $\alpha = 69°$.



2. a. Par définition :

$$\vec{a}_G(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

b. $a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -9{,}83\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

c. Le logiciel permet d'obtenir $a_x(t)$ en dérivant $v_x(t)$, $a_y(t)$ en dérivant $v_y(t)$ et d'afficher $a_x(t)$ et $a_y(t)$. Dans les deux cas, on obtient des points dispersés autour d'une valeur constante :

$$a_x(t) \approx 0 \text{ et } a_y(t) \approx -10.$$

La méthode utilisant deux dérivations successives apporte trop d'erreurs pour être utilisée.

d. L'hypothèse de la chute libre est validée si $\vec{a}_G = \vec{g}$.
Dans cette chute, le vecteur accélération est bien vertical et orienté vers le bas comme $\vec{g}$.
La valeur de l'accélération est sensiblement égale à g.
On peut valider l'hypothèse de chute libre.

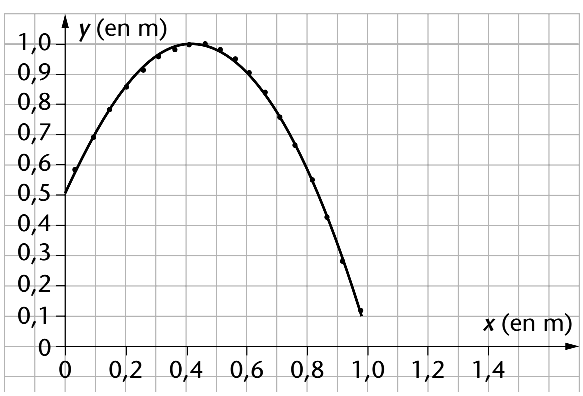
3. a. On établit les équations horaires du mouvement (*cf.* cours § 3.2) en tenant compte des conditions initiales.

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha\ ;\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha\ ;\ v_z(t) = 0 \\ x(t) = v_0 (\cos\alpha)\, t\ ;\ y(t) = -\dfrac{1}{2} gt^2 + v_0(\sin\alpha)\, t\ ;\ z(t) = 0 \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant la date t dans l'expression de y :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)\, x.$$

b.



b. La modélisation conduit au résultat suivant :

$$y(x) = -Ax^2 + Bx = -3{,}32x^2 + 3{,}06x + 0{,}298.$$

c. De la valeur de $B = \tan\alpha$, on déduit $\alpha = 72°$.

De la valeur de $A = \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$, on déduit $v_0 = 3{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Les valeurs sont en accord avec celles trouvées précédemment.

TP 2

Commentaire : La simulation permet d'explorer une situation délicate : l'étude du mouvement du ballon lancé par la gymnaste, elle-même en mouvement.
Afin de provoquer la réflexion des élèves, les coordonnées du vecteur vitesse du ballon au cours de son déplacement sont masquées à l'ouverture du fichier.
Pour faire apparaître la fenêtre, réaliser les actions suivantes : un clic de souris à droite de la fenêtre « position du ballon » ouvre une fenêtre (voir ci-après ; cocher devant « montrer ».

Réponses aux questions

1. Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, à l'instant de date $t_0 = 0$ s, les coordonnées du vecteur vitesse du ballon sont :

$$v_{0x} = v_1 \text{ et } v_{0y} = v_2.$$

2. a. Par intégrations successives :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_1 \text{ et } v_y(t) = -gt + v_2 \\ x(t) = v_1 t + x_0 \text{ et } y(t) = -\dfrac{1}{2} gt^2 + v_2 t + y_0 \end{cases}$$

D'où :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_1^2} + \frac{v_2}{v_1}(x - x_0) + y_0.$$

b. Schéma de la trajectoire parabolique avec un vecteur vitesse initial : *cf.* cours figure 16 page 233.

3. a. Au sommet de la trajectoire, $v_{0x} = v_1$ et $v_{0y} = 0$ donc $v = v_1$.

b. Au sommet F : $v_y(t_F) = -gt_F + v_2 = 0$, donc $t_F = \dfrac{v_2}{g}$.

En reportant dans l'expression de $y(t)$, on obtient :

$$y_F = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_2}{g}\right)^2 + v_2 \left(\frac{v_2}{g}\right) + y_0 = \frac{v_2^2}{2g} + y_0.$$

Le calcul avec $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ donne $y_F = 3{,}54$ m.

4. Le ballon est rattrapé à la date t_P telle que :

$$y_P = y_0 = -\frac{1}{2} gt^2 + v_2 t + y_0.$$

$$0 = -\frac{1}{2} gt^2 + v_2 t = t\left(-\frac{1}{2} gt + v_2\right) \text{ d'où } t_P = 2\frac{v_2}{g} = 1{,}22 \text{ s}.$$

5. La distance parcourue par le ballon est :

$$x_P - x_0 = v_1\, t_P = 2\frac{v_1 v_2}{g} = 4{,}90 \text{ m}.$$

La simulation permet la vérification de ces valeurs.

6. La distance parcourue par la gymnaste en mouvement rectiligne uniforme est la même :

$$x_P - x_0 = v_1\, t_P = 2\frac{v_1 v_2}{g} = 4{,}90 \text{ m}.$$

7. La gymnaste rattrape le ballon à condition de se déplacer à vitesse constante.
Pour augmenter le temps de vol, elle doit donner une valeur plus grande à v_2 (pas trop, pour éviter les lustres !).

8. a. Dans le référentiel de la gymnaste, le ballon a une trajectoire rectiligne.

b. La simulation confirme et montre le ballon constamment à la verticale de la main de la gymnaste.

REMARQUE : Lorsque le ballon touche un lustre d'éclairage, le mouvement est perturbé… et la gymnase ne rattrape pas le ballon.
En effet, la méthode de calcul itératif permet le tracé ultérieur, avec ces nouvelles conditions initiales (les hypothèses du choc sont placées au préalable dans le programme).

Exercices

Exercices d'application

4 **a.** Poids :

$$P_{\text{liège}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \mu_{\text{liège}} \times g$$

$$= \frac{4}{3}\pi(1{,}0 \times 10^{-2})^3 \times 240 \times 9{,}8 = 9{,}8 \times 10^{-3}\ \text{N}\ ;$$

$$P_{\text{plomb}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \mu_{\text{plomb}} \times g = 4{,}6 \times 10^{-1}\ \text{N}.$$

Poussée d'Archimède :

$$\Pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \mu_{\text{air}} \times g$$

$$= \frac{4}{3}\pi(1{,}0 \times 10^{-2})^3 \times 1{,}3 \times 9{,}8 = 5{,}3 \times 10^{-5}\ \text{N}.$$

b. $\Pi \ll P_{\text{liège}}$ et $\Pi \ll P_{\text{plomb}}$: la poussée est négligeable devant le poids dans les deux cas.

5 **a.** Pour la bille d'acier :

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{4 \times 10^{-2}}{7 \times 10^{-6}} = 6 \times 10^3\ ;$$

$$\frac{P}{f} = \frac{4 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-4}} = 1 \times 10^2.$$

Pour la balle :

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{2 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-4}} = 7 \times 10^1\ ;$$

$$\frac{P}{f} = \frac{2 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3}} = 4.$$

b. La bille d'acier est en chute libre car les forces dues à l'air sont négligeables devant le poids : la bille tombe sous l'effet de son poids. La balle n'est pas en chute libre car la force de frottement n'est pas négligeable devant le poids.

6 **a.** $\alpha = \dfrac{\widehat{MM'}}{R_T} = \dfrac{100}{6\,380} = 1{,}57 \times 10^{-2}$ rad $= 0{,}898°$; on peut considérer que les verticales sont parallèles et donc que le champ de pesanteur est pratiquement identique en deux points de la surface terrestre distants de 100 km.

b. $\dfrac{g_0 - g}{g_0} = \dfrac{2h}{R_T} = \dfrac{2 \times 30}{6\,380} = 9{,}4 \times 10^{-3} = 0{,}94\ \%$, variation inférieure à 1 %.

c. Le champ de pesanteur est uniforme dans un domaine de 100 km sur 100 km au niveau du sol et sur une hauteur de 30 km.

7 **a.** Système : la bille.

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est la seule force qui s'exerce sur elle.

Application de la deuxième loi de Newton et simplification par m $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Par définition, $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$; les équations différentielles du mouvement du centre d'inertie de la bille sont donc :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0\ ;\ \frac{dv_y}{dt} = 0\ ;\ \frac{dv_z}{dt} = g.$$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = 0\ ;\ v_y(t_0) = 0\ ;\ v_z(t_0) = 0 \\ x(t_0) = 0\ ;\ y(t_0) = 0\ ;\ z(t_0) = 0 \end{cases}$$

Par intégrations successives, on obtient les équations horaires :

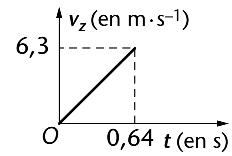
$$\begin{cases} v_x(t) = 0\ ;\ v_y(t) = 0\ ;\ v_z(t) = gt \\ x(t) = 0\ ;\ y(t) = 0\ ;\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

b. De l'expression de $z(t)$, on tire : $t = \sqrt{\dfrac{2z}{g}}$.

La durée de la chute correspond à $z_1 = 2{,}0$ m :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2z_1}{g}} = 0{,}64\ \text{s}.$$

c. $v_1 = v_z(t_1) = g\,t_1 = 6{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.



8 **a.** Système : la pierre ; application de la deuxième loi de Newton et simplification par m :

$\vec{a}_G = \vec{g}$; $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ d'où l'équation différentielle :

$$\frac{dv_z}{dt} = g.$$

Conditions initiales :

$$v_z(t_0) = 0 \text{ et } z(t_0) = 0.$$

Par intégration : $v_z(t) = gt$ et $z(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$.

On en déduit : $v_z(z) = \sqrt{2gz}$.

Pour $z_1 = 10$ m ; $v_1 = \sqrt{2gz_1} = 14\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

b. Énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_{c1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}200 \times 14^2 = 20\ \text{J}.$$

c. Variation d'énergie potentielle de pesanteur :

$$\Delta\mathscr{E}_{pp} = -\,mgz_1 = -\,0{,}200 \times 9{,}8 \times 10 = -\,20\ \text{J}$$

(signe –, diminution d'énergie potentielle).

Pour une chute libre (cours de 1re S) : $\Delta\mathscr{E}_c = -\,\Delta\mathscr{E}_{pp} = 20$ J ; $\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_{c1} - \mathscr{E}_{c0}$ et $\mathscr{E}_{c0} = 0$ donc $\mathscr{E}_{c1} = 20$ J.

9 *Corrigé dans le manuel.*

10 **a.** Dans l'hypothèse d'une chute libre :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

La profondeur du puits est donnée par :

$$z_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 2{,}0^2 = 20\ \text{m}.$$

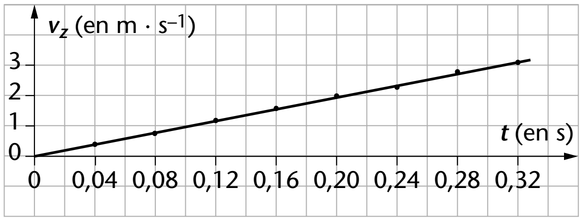
b. $z_2 = \dfrac{1}{2}gt_2^2 = 78$ m (et non 40 m !).

11 **a.** La chute est verticale, le seul axe choisi pour repérer les positions est vertical ; il est dirigé vers le bas car les valeurs de z sont positives.

b. $v_z(t_i) = \dfrac{z_{i+1} - z_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$;

$$v_z(0{,}20) = \frac{0{,}282 - 0{,}125}{0{,}24 - 0{,}16} = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

c. La représentation de $v_z(t)$ donne une droite passant par l'origine : $v_z(t) = \alpha t$.



d. Dans l'hypothèse d'une chute libre : $v_z = gt$ (*cf.* exercice 7). Le coefficient directeur de la droite est :

$$\alpha = \frac{3{,}14 - 0}{0{,}32 - 0} = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$v_z(t) = 9{,}8 \times t = g\, t$.
La chute peut être considérée comme libre ; $\vec{a}_G = \vec{g}$.

12 *Corrigé dans le manuel.*

13 *Corrigé dans le manuel.*

14 **a.** La règle est placée dans le plan de la trajectoire. La caméra est placée perpendiculairement au plan de la trajectoire.
b. Les vecteurs vitesse sont tangents à la trajectoire au point considéré.
Échelle de représentation : 1 cm ↔ 1 m · s^{-1}.
• Vitesse au point G_2 :

$$v_2 = \frac{G_1G_3}{2\tau_e} = 4{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit 4,8 cm sur le document.
• Vitesse au point G_4 :

$$v_4 = \frac{G_3G_5}{2\tau_e} = 4{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit 4,2 cm sur le document.
• Le vecteur accélération au point G_3 est donné par :

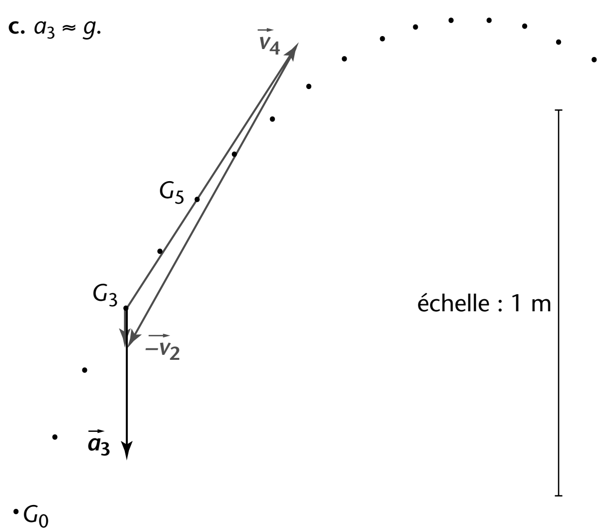
$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_2}{2\,\tau_e} = \frac{\Delta\vec{v}}{2\,\tau_e}.$$

Graphiquement, on obtient : $\Delta v = 0{,}80$ m · s^{-1}.

Et $a_3 = \dfrac{0{,}80}{2 \times 40 \times 10^{-3}} = 10$ m · s^{-2}.

Si l'échelle de représentation est 1 cm ↔ 5 m · s^{-2}, le vecteur $\vec{a}_3$ mesure 2 cm.

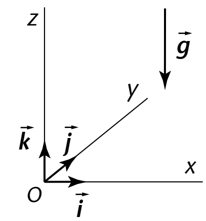
c. $a_3 \approx g$.



16 *Corrigé dans le manuel.*

Exercices de synthèse

17 **a.** Système : le « poids » ;
$t_0 = 0$ s (*cf.* cours § 3.2).



Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \;;\; v_y(t_0) = 0 \;; \\ v_z(t_0) = v_0 \sin\alpha \\ x(t_0) = 0 \;;\; y(t_0) = 0 \;;\; z(t_0) = h \end{cases}$$

Par intégrations successives :
$x(t) = v_0\,(\cos\alpha)\,t$; $y(t) = 0$;

$z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g t^2 + v_0\,(\sin\alpha)\,t + h$.

$y(t) = 0$, le mouvement s'effectue dans le plan $(O\,;\vec{i}, \vec{k})$.
L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant la date t :

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\,(\sin\alpha)\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right) + h$$

$$= -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + (\tan\alpha)\,x + h.$$

b. À l'arrivée au sol :

$$z = 0 = -\,0{,}060\,x^2 + 1{,}2\,x + 2{,}0.$$

Équation du second degré dont les solutions sont :

$$x_1 = -\,1{,}5 \text{ m} \quad\text{et}\quad x_2 = 21 \text{ m}.$$

Le point B correspond à x_2 : $OB = 21$ m.

c. $\mathscr{E}_{c\,B} = \mathscr{E}_{c\,A} + W_{AB}(\vec{P}) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 + mg\,(z_A - z_B)$

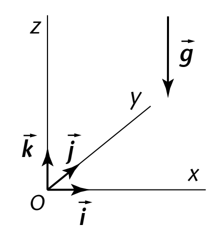
$$= \frac{1}{2}\,m\,v_A^2 + mg\,h\;;$$

$\mathscr{E}_{c\,B} = 8{,}5 \times 10^2$ J.
La valeur de sa vitesse en B est :

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,\mathscr{E}_{c\,B}}{m}} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

d. La valeur de la masse n'intervient pas dans la valeur de OB. Avec $m = 5{,}44$ kg, la performance est identique si la valeur de la vitesse initiale est identique

18 **a.** • Système : le projectile 1
(*cf.* cours § 3.2).



Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = v_{01} \;;\; v_y(t_0) = 0 \;; \\ v_z(t_0) = 0 \\ x(t_0) = 0 \;;\; y(t_0) = 0 \;;\; z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{01} \;;\; v_y(t) = 0 \;; \\ v_z(t) = -\,gt \\ x(t) = v_{01}\,t \;;\; y(t) = 0 \;; \end{cases}$$

$z(t) = -\dfrac{1}{2}\,gt^2 + z_0$

• De même, pour le projectile 2
Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = 0 \;;\; v_y(t_0) = 0 \;;\; v_z(t_0) = v_{02} \\ x(t_0) = x_0 \;;\; y(t_0) = 0 \;;\; z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \;;\; v_y(t) = 0 \;;\; v_z(t) = -\,gt + v_{02} \\ x(t) = x_0 \;;\; y(t) = 0 \;; z(t) = -\dfrac{1}{2}\,gt^2 + v_{02}t + z_0 \end{cases}$$

b. Durée de chute : date pour laquelle $z = 0$.
• Projectile 1 :

$$z(t_1) = -\frac{1}{2}\,g t_1^2 + z_0 = 0\;;$$

$t_1 = \sqrt{\dfrac{2\,z_0}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 2{,}0}{9{,}8}} = 0{,}64$ s.

À cette date :
$v_x(t_1) = 10$; $v_z(t_1) = -\,gt_1 = -\,6{,}3$ m · s^{-1} ;

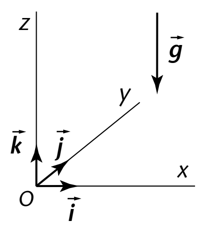
$v_1 = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_z^2(t_1)} = 12$ m · s^{-1}.

• Projectile 2 :
$z(t_2) = -\,\dfrac{1}{2}\,gt_2^2 + v_{02}\,t_2 + z_0 = 0$;
$t_2 = 2{,}2$ s (on élimine la racine négative).

À cette date :
$v_z(t_2) = -\,g\,t_2 + v_{02} = -\,12$ m · s^{-1} ;
$v_2 = 12$ m · s^{-1}.
Les deux projectiles ont la même vitesse à l'arrivée au sol.

19 **a.** Système : la balle (*cf.* cours § 3.2).
Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = v_0 \;;\; v_y(t_0) = 0 \;;\; v_z(t_0) = 0 \\ x(t_0) = 0 \;;\; y(t_0) = 0 \;;\; z(t_0) = H \end{cases}$$



D'où :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\,t \;;\; z(t) = -\,\dfrac{1}{2}\,gt^2 + H \\ z(x) = -\,\dfrac{1}{2}\,g\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 + H \end{cases}$$

AN : $z(12{,}0) = 0{,}736$ m $< 0{,}900$ m, la balle ne passe pas au-dessus du filet.

b. De $z(x) = -\,\dfrac{1}{2}\,g\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 + H$, on déduit $v_0 = \sqrt{\dfrac{g\,x^2}{2\,(H - z)}}$.

Avec $z(12{,}0) = 0{,}100$ m, $v_0 = 21{,}7$ m · s^{-1}.
Lorsque la balle arrive au sol :

$$z = 0 = -\,\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + H \quad \text{soit} \quad x = \sqrt{\frac{2\,H\,v_0^2}{g}} = 15{,}5 \text{ m},$$

et la balle touche le sol à :

$15{,}5 - 12 = 3{,}5$ m du filet.

20 **a.** Système : une goutte d'eau (*cf.* cours § 3.2).
Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \;;\; v_y(t_0) = 0 \;;\; v_z(t_0) = v_0 \sin\alpha \\ x(t_0) = 0 \;;\; y(t_0) = 0 \;;\; z(t_0) = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \;;\; v_z(t) = -\,gt + v_0 \sin\alpha \\ x(t) = v_0\,(\cos\alpha)\,t \;;\; z(t) = -\,\dfrac{1}{2}\,gt^2 + v_0\,(\sin\alpha)\,t \end{cases}$$

Et $z(x) = -\,\dfrac{1}{2}\,g\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (\tan\alpha)\,x$.

b. On cherche z_S, S étant le sommet de la trajectoire. On a alors :

$\dfrac{dz}{dx} = 0$ (ou $v_z(t) = -\,gt + v_0 \sin\alpha = 0$; *cf.* cours § 3.2.D).

$\dfrac{dz}{dx} = -\,g\dfrac{x_S}{(v_0 \cos\alpha)^2} + (\tan\alpha) = 0$ soit $x_S = \dfrac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$.

En reportant dans l'équation de la trajectoire :

$$z_S(x_S) = \frac{v_0^2\,(\sin\alpha)^2}{2g}.$$

AN : $z_S(x_S) = h = 1{,}3$ m.

c. Soit P le point tel que :

$$z_P = 0, \; x_P = 2\,x_S = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \;;$$

$x_P = 8{,}8$ m.

d. $x_P = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ est maximal si $\sin 2\alpha = 1$ soit $\alpha = 45°$.

Alors $x_P = \dfrac{v_0^2}{g}$; $x_P = 10$ m.

21 **a.** 1$^{\text{re}}$ phase : $0 < t < 3{,}0$ s : le parachute est fermé ; $v(t) = a\,t$, le mouvement est uniformément accéléré.
2$^{\text{e}}$ phase : $t > 3{,}0$ s, le parachute a été ouvert, les forces dues à l'air sont à prendre en compte ; la vitesse diminue et tend vers une limite.

b. 1$^{\text{re}}$ phase : $0 < t < 3{,}0$ s : $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$; la valeur de l'accélération est égale au coefficient directeur de la droite $v(t)$: $a = 10$ m · s^{-2}.
Le mouvement s'effectue selon la verticale ; le vecteur accélération est vertical, dirigé vers le bas : $\vec{a} \approx \vec{g}$.
La chute est une chute libre au sens du physicien, elle s'effectue sous l'effet du poids seul.

c. $a_z(t) = \dfrac{dv_z}{dt} = g$;
$v_z(t) = gt$ avec $v_z(t_0) = 0$;

$z(t) = \dfrac{1}{2}\,gt^2$ avec $z(t_0) = 0$;

$z(3{,}0 \text{ s}) = 44$ m.
L'altitude lors de l'ouverture est $350 - 44 = 306$ m.

d. La vitesse atteinte à la date $t = 0{,}5$ s est inférieure à la vitesse limite atteinte lorsque le parachute est ouvert. La vitesse va augmenter jusqu'à cette valeur puis rester constante.

22 **a.** Système : le ballon (*cf.* cours § 3.2).
Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \;;\; v_y(t_0) = 0 \;;\; v_z(t_0) = v_0 \sin\alpha \\ x(t_0) = 0 \;;\; y(t_0) = 0 \;;\; z(t_0) = H \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \;;\; v_z(t) = -\,gt + v_0 \sin\alpha \\ x(t) = v_0\,(\cos\alpha)\,t \;;\; z(t) = -\,\dfrac{1}{2}\,gt^2 + v_0\,(\sin\alpha)\,t + H \end{cases}$$

Et $z(x) = -\,\dfrac{1}{2}\,g\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (\tan\alpha)\,x + H$.

$z(12{,}0) = 3{,}8$ m $> h + r = 2{,}51$ m : la balle passe au-dessus du filet.
On cherche x_P, l'abscisse du point P d'arrivée au sol :

$$z_P = 0 = -\,\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (\tan\alpha)\,x + H.$$

Les solutions de l'équation $-\,0{,}025x^2 + 0{,}36x + 3 = 0$ sont :

$x = -\,5{,}9$ m et $x = 20{,}3$ m.

La valeur cherchée est positive, donc :

$x_P = 20$ m $< D + D' = 21$ m ;

le service est bon.

b. Le joueur est situé à l'abscisse 14 m.

On cherche $z(14) = -\,\dfrac{1}{2}\,g\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (\tan\alpha)\,x + H$;

$z(14) = 3{,}3$ m.
La main du joueur doit se situer à l'altitude de 3,3 m. En tenant compte du rayon du ballon : 3,2 m.

23 **1. a.** Le référentiel du bateau est considéré galiléen car le mouvement du bateau est rectiligne uniforme par rapport à la Terre.

b. Système : la boule ; $a_y(t) = g$.

Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = 0\ ;\ v_y(t_0) = 0 \\ x(t_0) = 0\ ;\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

D'où $x(t) = 0$; $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

c. Durée de la chute : $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}7$ s.

Abscisse du point de chute : $x = 0$; la boule tombe au pied du mât dans le référentiel du bateau.

2. a. Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t_0) = v_0\ ;\ v_y(t_0) = 0 \\ x(t_0) = 0\ ;\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} x(t) = v_0\, t\ ;\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \\ y(x) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \end{cases}$$

c. La durée de la chute est toujours donnée par :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}7 \text{ s.}$$

La boule tombe à l'abscisse $x = v_0\, t_1$.

Pendant cette durée, le bateau a parcouru la même distance $x = v_0\, t_1$ et la boule tombe au pied du mât.

3. a. Salviati défend les idées de Galilée, Simplicio pense que la boule ne tombe pas au pied du mât si le bateau est en mouvement. Il ne tient pas compte de la vitesse initiale de la boule.

b. Salviati ne peut pas savoir si le navire est en mouvement rectiligne uniforme ou au repos puisque la boule tombe dans les deux cas au pied du mât.

c. Les adversaires des théories de Galilée pensent que si la Terre est en mouvement, on devrait s'en apercevoir. Galilée montre que, dans cet exemple, on ne perçoit pas le mouvement du navire.

d. Si le mouvement du navire est rectiligne uniformément accéléré, la distance parcourue par le bateau pendant la durée de la chute ne sera pas égale à la distance parcourue par la boule suivant l'axe horizontal : le boulet tombera en arrière du mât.

24 **a.** Système : la balle.

Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_{B\,x}(t_0) = v_0 \cos\alpha\ ;\ v_{B\,y}(t_0) = v_0 \sin\alpha \\ x_B(t_0) = 0\ ;\ y_B(t_0) = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v_{B\,x}(t) = v_0 \cos\alpha\ ;\ v_{B\,y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ x_B(t) = v_0 (\cos\alpha)\, t\ ;\ y_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 (\sin\alpha)\, t \end{cases}$$

b. Système : le singe.

Conditions initiales :

$$\begin{cases} v_{S\,x}(t_0) = 0\ ;\ v_{S\,y}(t_0) = 0 \\ x_S(t_0) = x_0\ ;\ y_S(t_0) = y_0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v_{S\,x}(t) = 0\ ;\ v_{S\,y}(t) = -gt \\ x_S(t) = x_0\ ;\ y_S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{cases}$$

c. Le singe (noté S) attrape la balle (notée B) si à une date t_1 :

$$x_B(t_1) = x_0(t_1) \ \text{ et } \ y_B(t_1) = y_S(t_1)$$

soit $x_0 = v_0 (\cos\alpha)\, t_1$ soit $t_1 = \frac{x_0}{v_0 \cos\alpha}$

et :

$$-\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 (\sin\alpha)\, t_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + y_0$$

soit $t_1 = \frac{y_0}{v_0 \sin\alpha}$.

Des deux expressions de t_1, on déduit que :

$$\tan\alpha = \frac{y_0}{x_0}.$$

Cette condition est réalisée et le singe attrape la balle.

Cependant, il y a aussi une condition sur la valeur de la vitesse initiale.

Il faut que l'ordonnée du point de rencontre soit positive, ce qui s'exprime par exemple par :

$y_S(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + y_0 > 0$ avec $t_1 = \frac{x_0}{v_0 \cos\alpha}$.

Il vient $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{g\, x_0^2}{2y_0 \cos^2\alpha}}$ avec $\cos\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$, soit :

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{g(x_0^2 + y_0^2)}{2y_0}}.$$

Il existe donc une valeur minimale pour v_0.

AN : $v_0 = 7{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour aller plus loin

25 **a.** L'équation de la trajectoire est (*cf.* exercice 20) :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + (\tan\alpha)\, x.$$

b. On remplace $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1 + \tan^2\alpha$:

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\,(1 + \tan^2\alpha)\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + (\tan\alpha)\, x.$$

On obtient :

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \tan^2\alpha + (\tan\alpha)\, x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 - z = 0.$$

En notant $X = \tan\alpha$, on obtient une équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$ avec :

$$a = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2\ ;\ b = x\ ;\ c = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 - z.$$

Les solutions de cette équation donnent $\tan\alpha$ pour le couple de valeurs $(x\ ;\ 0\ ;\ z)$ imposé.

AN : $-44{,}1\, X^2 + 300\, X - 294 = 0$.

Les solutions sont :

$$X_1 = 1{,}19 \ \text{ et } \ X_2 = 5{,}61.$$

Soit :

$\alpha_1 = 50°$ (tir tendu) et $\alpha_2 = 80°$(tir en cloche).

c. Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est atteint par le projectile si et seulement si l'équation du second degré établie à la question **b.** admet des solutions (une ou plusieurs).

L'expression du discriminant de cette équation est :

$$\Delta = x^2 - 2\,g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2\left(\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + z\right)$$

$$= x^2\left(1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + z\right)\right)\ .$$

$\Delta \geqslant 0$ si et seulement si :

$$1 - \frac{2g}{v_0^2}\left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + z\right) \geqslant 0$$

si et seulement si :

$$z \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}.$$

L'ensemble des points qui peuvent être atteints par le projectile est donc l'ensemble des points situés en dessous de la courbe d'équation $z = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g\,x^2}{2v_0^2}$. C'est la « parabole de sûreté », ainsi nommée car, avec cette valeur de la vitesse initiale, les points situés au-dessus de cette courbe ne sont pas accessibles lors d'un tir.